MATHÉMATIQUES : ÉPREUVE B

FILIÈRE PHYSIQUE ET SCIENCES DE L'INGÉNIEUR

DURÉE : 2 heures 30.

N.B. : Ce sujet comporte 3 pages de texte.
Deux feuilles de papier millimétré seront nécessaires.

PROBLÈME

PRÉAMBULE : Le candidat admettra les 2 résultats suivants :

1. Soit g une fonction réelle définie au voisinage du point a de $\mathbb{R}$. Alors g est dérivable en a, de nombre dérivé ℓ si et seulement si pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\alpha>0$, tel que pour tout couple $(h,k) \in \mathbb{R}_+^2$, vérifiant $0 < h+k < \alpha$, on a l'inégalité :
$$\left| \frac{g(a+h) - g(a-k)}{h+k} - \ell \right| < \varepsilon .$$
2. Si, dans $\mathbb{R}$, un compact **K** est inclus dans la réunion d'une famille d'ouverts alors il existe une famille finie de ces ouverts dont la réunion contient **K**.

PARTIE A

On définit par récurrence la suite (f_n) de fonctions définies sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$ par : $f_0(x) = x$ et, pour tout n entier naturel, on suppose que f_{n+1} est affine sur les intervalles $\left[\frac{k}{3^{n+1}} , \frac{k+1}{3^{n+1}}\right]$ avec k variant de 0 à $3^{n+1}-1$ et qu'elle vérifie les relations suivantes :

$$f_{n+1}\left(\frac{k}{3^n}\right) = f_n\left(\frac{k}{3^n}\right), f_{n+1}\left(\frac{k}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}}\right) = f_n\left(\frac{k}{3^n} + \frac{2}{3^{n+1}}\right), f_{n+1}\left(\frac{k}{3^n} + \frac{2}{3^{n+1}}\right) = f_n\left(\frac{k}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}}\right) \text{ et}$$
$$f_{n+1}(1) = 1.$$

1. Tracer sur une même figure les graphes de f_0, f_1, f_2 (unité 18 cm conseillée).

2. On suppose f_n connue ; on donne les coordonnées $x_n = \frac{k}{3^n}$, $y_n = \frac{k+1}{3^n}$, $x'_n = f_n\left(\frac{k}{3^n}\right)$, $y'_n = f_n\left(\frac{k+1}{3^n}\right)$, représenter graphiquement f_{n+1} dans l'intervalle $[x_n,y_n]$ et démontrer successivement que :

   a. Pour tout n de $\mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0,1]$.

   b. Pour tout n de $\mathbb{N}$, tout x de $[x_n,y_n]$, et tout entier $m \geq n$, on a $f_m(x) \in [x'_n,y'_n]$.

   c. Établir enfin que ,pour tout $n \in \mathbb{N}$,on a $|x'_n - y'_n| \leq (2/3)^n$.

3. Soit x un réel de $[0,1[$. Démontrer qu'il existe une suite d'entiers $n \longmapsto k_n$ de $\mathbb{N}$ unique telle que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\frac{k_n}{3^n} \leq x < \frac{k_n+1}{3^n}$.

   On pose alors : $x_n = \frac{k_n}{3^n}$, $y_n = \frac{k_n+1}{3^n}$, $x'_n = f_n(x_n)$, $y'_n = f_n(y_n)$ et si $x'_n \leq y'_n$, $x''_n = x'_n$ $y''_n = y'_n$, enfin si $x'_n > y'_n$, $x''_n = y'_n$ $y''_n = x'_n$.

   Démontrer que les suites (x''_n) et (y''_n) sont adjacentes et convergentes.
   On note $\varphi(x)$ leur limite commune et l'on pose $\varphi(1) = 1$.

4. Démontrer que la suite $n \longmapsto f_n$ converge uniformément vers φ sur $[0,1]$.
   En déduire que φ est continue sur le segment $[0,1]$.

5. Soit $0 < x < 1$ un réel. On reprend les notations A.3. et l'on pose pour tout entier n de $\mathbb{N}$: $D_n = 3^n(y'_n - x'_n)$.
   Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $D_{n+1} = 2D_n$ ou $D_{n+1} = -D_n$.

6. En déduire que D_n n'admet pas de limite finie quand n tend vers l'infini. Établir que la fonction φ n'est dérivable en aucun point de $[0,1]$.

PARTIE B

1. Étudier la convergence simple puis uniforme de chacune des suites réelles $n \longmapsto f_n$ suivantes ; f_n est définie sur $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$. À défaut de la convergence uniforme sur $\mathcal{D}$ tout entier, déterminer s'il y a convergence uniforme sur certains intervalles I de $\mathcal{D}$:

   a. $f_n(x) = \frac{1}{1 + nx^2}$ sur $\mathbb{R}$.

   b. $f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

c. $f_n(x) = n^p x^n(1 - x)$ sur $[0,1]$ selon le paramètre $p>0$ réel.

d. $f_n(x) = \sin \frac{nx}{n + x}$ sur $[0,+\infty[= \mathbb{R}_+$.

e. $f_n(x) = \frac{\sin^2 nx}{n \sin x}$ sur $]-\frac{\pi}{2},0[\cup]0,\frac{\pi}{2}[$ et $f_n(0) = 0$.

Dans les cas a. à d., comparer $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$ et $\int_0^1 \lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x)\, dx$.

2. Soit f une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout x non nul, $|f(x)| < |x|$.

   a. Soit b et c deux réels tels que $0 < b < c$. Démontrer qu'il existe un réel $k \in [0,1[$ tel que pour tout x de [b,c], $|f(x)| \leq k|x|$.

   b. On définit la suite (f_n) par $f_1 = f$ et $f_{n+1} = f_n \circ f$; justifier que (f_n) converge uniformément sur [-c,+c] vers une fonction simple.

3. Soit $a<b$ deux réels et (f_n) une suite d'applications de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $n \longmapsto f_n$ est une suite **croissante** de fonctions continues qui converge simplement sur $[a,b]$ vers une fonction f **continue** $(n \in \mathbb{N})$.

   a. Soit $\varepsilon>0$ et $X_n = \{x \in [a,b] ; f(x) < f_n(x)+\varepsilon\}$ Prouver que X_n est ouvert dans $[a,b]$, puis que $X_n \subseteq X_{n+1}$ et enfin que $[a,b] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$.

   b. En utilisant le fait que $[a,b]$ est compact, démontrer que (f_n) converge uniformément vers f sur [a,b].

   c. Soit $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$; démontrer que la suite (f_n) converge uniformément vers une fonction élémentaire sur tout intervalle borné.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail